

전기-기계 연성 수학적 해석 모델을 이용한 압전 에너지 하베스팅의 불확실성 확산 분석

윤헌준*† · 윤병동*# · 김흥수**

*서울대학교 기계항공공학부, **동국대학교 기계로봇에너지공학과

Uncertainty Propagation Analysis of Piezoelectric Energy Harvesting Using an Electromechanically-Coupled Analytical Model

Heonjun Yoon*†, Byeng D. Youn*#, and Heung S. Kim**

*Department of Mechanical and Aerospace Engineering, Seoul National University

**Department of Mechanical, Robotics and Energy Engineering, Do nguk University-Seoul

1. 서론

응력에 의해서 변형이 일어나면 전류가 발생하는 압전 소자를 이용하여 버려지는 진동 에너지를 전력으로 재 수집하는 압전 에너지 하베스팅 기술이 큰 관심을 받고 있다. 주어진 진동 조건에서 압전 에너지 수확 장치의 전기-기계적 거동을 이해하기 위해서는 수학적 해석 모델이 필수적이다. 하지만 지금까지 개발된 대부분의 수학적 해석 모델은 결정론적이기 때문에, 재료물성과 제작공차 등에 내포된 불확실성으로 인하여 실제 환경에서 예측 신뢰도가 낮아진다. 극소수의 연구들이 에너지 수확 장치의 불확실성 확산 분석을 시도한바 있지만, 모든 입력변수들을 상호독립적인 정규분포로 가정하였기 때문에 변수 간에 비선형 상관관계가 있는 경우 오차가 커진다. 이에 본 연구에서는 각 입력변수의 통계적 특성이 전력 변동으로 전파되는 메커니즘을 최초로 기술하였다.

2. 전기-기계 연성 수학적 해석 모델

2.1 구성방정식

압전 에너지 수확 장치는 두께가 얇은 평판 구조이므로, 평면 응력 상태에서의 Kirchhoff 판 이론을 기반으로 모델링 하였다. 횡방향으로 등방성 압전 소재인 PZT의 구성 방정식은 식 (1)과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11}^E & \bar{c}_{12}^E & 0 & -e_{31} \\ \bar{c}_{12}^E & \bar{c}_{11}^E & 0 & -e_{31} \\ 0 & 0 & \bar{c}_{66}^E & 0 \\ e_{31} & e_{31} & 0 & \epsilon_{33}^S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

\bar{c}_{11}^E , \bar{c}_{12}^E , \bar{c}_{66}^E 는 PZT의 탄성계수이며, e_{31} 와 ϵ_{33}^S 는 각각 압전상수와 유전상수이다.

2.2 운동방정식

비 감쇠 진동에 대한 압전 에너지 수확 장치의 운동방정식을 Hamilton의 정리를 이용하여 아래와 같이 4차 미분방정식으로 유도하였다.

$$\begin{aligned} & \{\rho_s h_s + \rho_p h_p P(x, y)\} \ddot{w}_{rel} \\ & + \{D_1 + D_2 P(x, y)\} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w_{rel}}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_{rel}}{\partial y^2} \right)^2 \right\} \\ & + 2\nu_s \left(\frac{\partial^2 w_{rel}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_{rel}}{\partial y^2} \right) + 2(1-\nu_s) \left(\frac{\partial^2 w_{rel}}{\partial x \partial y} \right)^2 \\ & + D_3 P(x, y) \left\{ \left(\frac{\partial^2 w_{rel}}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_{rel}}{\partial y^2} \right)^2 \right\} \\ & + 2P(x, y) \left\{ D_4 \left(\frac{\partial^2 w_{rel}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_{rel}}{\partial y^2} \right) + 2D_5 \left(\frac{\partial^2 w_{rel}}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \\ & + e_{11} \nu(t) \left(\frac{h_p + h_s}{2} - z_o \right) \left\{ \frac{\partial^2 P(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P(x, y)}{\partial y^2} \right\} \\ & = -\{\rho_s h_s + \rho_p h_p P(x, y)\} \ddot{w}_{base} \end{aligned} \quad (2)$$

압전 소자에 인장과 압축이 동시에 작용하면 전압 상쇄 현상이 발생하기 때문에, 동적 변형을 형상으로부터 마디선을 추출한 후 PZT를 분할하여 부착할 필요가 있다. 따라서 PZT 위치를 나타내는 지표함수로서 $P(x, y)$ 를 정의하였으며, Heaviside 단위 계단 함수들의 합으로 표현한다. D_1 와 D_2 는 각각 PZT가 없는 위치와 부착된 위치에서의 기판의 굽힘 강성이며, $D_3 \sim D_5$ 는 방향에 따른 PZT의 굽힘 강성이다. w_{base} 와 w_{rel} 는 각각 압전 에너지 수확 장치의 기저 여기에 의한 기저 변위와 상대 변위이다. z_o 는 중립면의 위치이며, 힘 평형 방정식으로 계산된다. 더불어 PZT 분할 설계로 인하여 단면적이 일정하지 못하고 불연속 지점이 존재하기 때문에 고유치 문제에 대한 정해를 직접 구할 수 없으므로, Rayleigh-Ritz법을 이용하여 고유주파수 ω_m 과 모드 형상 $W_m(x, y)$ 을 계산하였다.

† Presenting Author, heonjun@snu.ac.kr, 02-880-1664

2.3 전기회로 방정식

PZT가 두께 방향으로 전기적 분극이 된 경우에, 식 (1)의 전기 변위 D_3 를 Gauss 법칙에 대입하면 식 (3)와 같이 전류 $i(t)$ 를 계산할 수 있으며⁽¹⁾, 이를 전기회로 방정식이라고 부른다.

$$i(t) = \frac{d}{dt} \left\{ \int_{S_p} (\bar{\epsilon}_{31} \epsilon_{xx} + \bar{\epsilon}_{33} \epsilon_{yy} + \epsilon_{33}^s E_3) dS_p \right\} - \bar{\epsilon}_{31} \left(\frac{h_p + h_s}{2} - z_o \right) \int_{S_p} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 v_{rel}(x, y, t)) dS_p - \frac{\epsilon_{33}^s a_p b_p}{h_p} \frac{dV(t)}{dt} \quad (3)$$

2.4 전압 응답

비례 감쇠가 적용된 운동 방정식과 전기 회로 방정식을 연립하면, 전압 응답 $v(\omega)$ 에 대하여 매개변수화 된 식 (4)가 유도된다.

$$v(\omega) = \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j\omega R_{load} \theta_m}{\omega_m^2 - \omega^2 + j2\zeta_m \omega_m \omega}}{\left(\frac{1}{R_{load}} + j\omega \frac{\epsilon_{33}^s a_p b_p}{2h_p} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j\omega R_{load} \theta_m^2}{\omega_m^2 - \omega^2 + j2\zeta_m \omega_m \omega}} \quad (4)$$

R_{load} 은 외부저항, ω 는 가진주파수, ζ_m 는 감쇠비이다. 전기-기계 연성 계수 θ_m 은 아래와 같다.

$$\theta_m = -\bar{\epsilon}_{31} \left(\frac{h_p + h_s}{2} - z_o \right) \int_{S_p} (\nabla^2 U_m W_m(x, y)) dS_p \quad (5)$$

Laplace 연산자 ∇^2 에 의하여 계산되는 압전 소자의 곡률에 따라 θ_m 의 부호가 결정되므로, 식 (5)는 전압 상쇄 현상의 이론적 근거가 된다.

3. 불확실성 확산 분석

3.1 랜덤변수의 통계적 모델링

수학적 해석 모델의 입력변수들을 독립변수(측정값)와 종속변수(독립변수들로부터 계산)로 분류한 후에, 독립변수들을 통계적으로 모델링 하였다 (Table 1). 또한 PZT를 특정 위치에 부착하는 과정에서 내포된 불확실성은 정규분포로 가정하였다.

3.2 상관관계 및 성능 변동 민감도 분석

정규분포를 따르지 않는 랜덤변수들(Fig. 1의 경우 모두 와이블분포임) 사이의 상관관계를 표현하기 위하여 Copula로 결합확률분포를 모델링 하였다. 더불어 출력 전압 변동에 대한 각 랜덤변수들의 민감도를 분석하였는데, 가령 Fig. 2의 경우 기관의 탄성계수 변화가 압전 변형을 계수보다 출력 전압 변동에 더 큰 영향을 미침을 알 수 있다.

3.3 성능변수 변동 추정

끝으로 Dimension reduction, Polynomial chaos expansion, Monte Carlo 시뮬레이션 등의 불확실성 확산 기법을 적용하여 성능변수의 변동을 통계적으로 정량화하였다. Fig. 3에서 좌측의 개방회로 공

진주파수는 정규분포를 따르는 반면에 우측의 출력 전압은 이분분포를 따르는 것을 알 수 있다.

Table 1 Statistical modeling of input random variables

Distribution	Random Variables			
Normal	Substrate thickness	h_s	PZT x-position	x_p
	PZT thickness	h_p	PZT y-position	y_p
	PZT length	a_p	Substrate density	ρ_s
	PZT width	b_p	PZT density	ρ_p
	Device length	L_x	Device width	L_y
	Lognormal	Substrate elastic modulus	γ_s	Piezoelectric strain coefficient
Permittivity at constant stress		ϵ_{33}^s		
Weibull	PZT elastic modulus	$\bar{c}_{11}^E, \bar{c}_{12}^E, \bar{c}_{66}^E$		

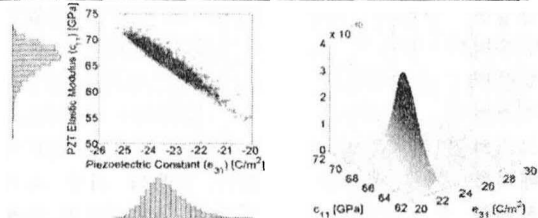


Fig. 1 Joint PDF estimation using Copula

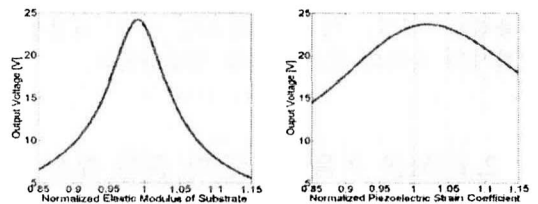


Fig. 2 Sensitivity on the variation of the output voltage

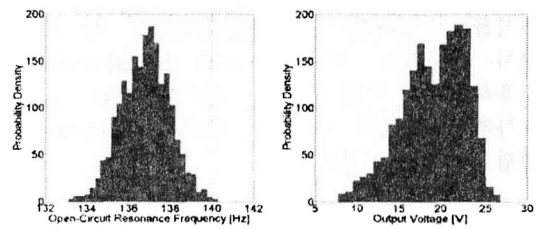


Fig. 3 Probability density of output performances

후 기

본 연구는 2014년도 정부(미래창조과학부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업(NRF-2010-0019092)이며, 2014년도 BK21 플러스 사업에 의하여 지원되었음.

참고문헌

(1) Erturk, A. and Inman D. J., 2011, *Piezoelectric Energy Harvesting*, John Wiley & Sons, pp. 214~217.